UAlg
esght

Variáveis aleatórias

Paulo Batista Basílio
(pbasilio@ualg.pt)

Dezembro 2014

De uma forma geral uma variável aleatória corresponde a uma regra de atribuição de valores numéricos a resultados de uma determinada experiência. Por exemplo, se lançarmos uma moeda 10 vezes, então o número de 'caras' que poderemos obter com essa experiência corresponde a $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 10\}$.

Portanto, a primeira razão para definirmos uma variável aleatória resulta da necessidade de substituirmos o espaço de resultados intrínseco à experiência por um outro composto por valores numéricos. Podemos assim responder a questões como o nž de caras expectáveis, ou a probabilidade de saírem 5 caras, ou menos de 5 caras?
Neste contexto, a variável aleatória pode ser discreta ou contínua.**No caso discreto** a variável aleatória pode assumir um número finito ou um número infinito, mas perfeitamente identificável e contável, de valores possíveis. É o caso do lançamento da moeda ao ar, uma vez que, em tese, é sempre possível lançar uma vez mais a moeda, sem qualquer limite, e desse modo o número de 'caras' que se podem obter também não tem limite, contudo, não ter limite não significa que não se possa contar todas as possibilidades. Seja qual for o número de possibilidades discretas inerentes à experiência aleatória é possível atribuir uma probabilidade não nula a cada um desses resultados possíveis.
A **função distribuição** , $F(x) = P(X \leq x)$, dá por simples substituição, $x = x_o$, a probabilidade $F(x_o)$ de X assumir valor inferior ou igual a um dado número real x_o.
Teoremas
(1) $0 \leq F(x) \leq 1$
(2) $F(x)$ é não decrescente, ou seja, para $\Delta x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta x)$
(3) Dado x_1 e x_2 e $x_2 > x_1$ tem-se $P(x < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Propriedades
$(1) P(X \leq x) = F(x)$ (por definição)
(2) $P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x)$
(3) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
(4) $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$
(5) $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
(6) $P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) - P(X = x_2)$
(7) $P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) + P(X = x_1)$
(8) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) + P(X = x_1)$

A **função probabilidade ou distribuição de probabilidade** $f(x) = P(X = x)$ caracteriza-se por
$f(x) \geq 0$
$\sum f(x_i) = 1$

Desta forma
$F(x) = P(X \leq x) \Leftrightarrow \sum_{a_i < x} f(a_i)$.

Consideremos uma vez mais o lançamento de uma moeda ao ar e admitamos que a seguinte função

$f(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x q^{n-x}$

é uma função probabilidade adequada a representar esta experiência aleatória. Neste caso, se repetirmos o lançamento da moeda 6 vezes então n = 6 e o acontecimento saída de cara tem um espaço de resultados discreto entre 0 e 6, ou seja, os valores possíveis da variável aleatória X são $(x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5, x_7 = 6)$.
Assim, se lançarmos 6 vezes uma moeda ao ar a probabilidade de não sair nenhuma cara será

$x = 0 \Rightarrow P(X = 0) = f(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-0} = 0.016.$

A probabilidade de sair apenas uma cara será

$x = 1 \Rightarrow P(X = 1) = f(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 0.094.$

E assim sucessivamente,

$x = 2 \Rightarrow P(X = 2) = f(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = 0.234;$

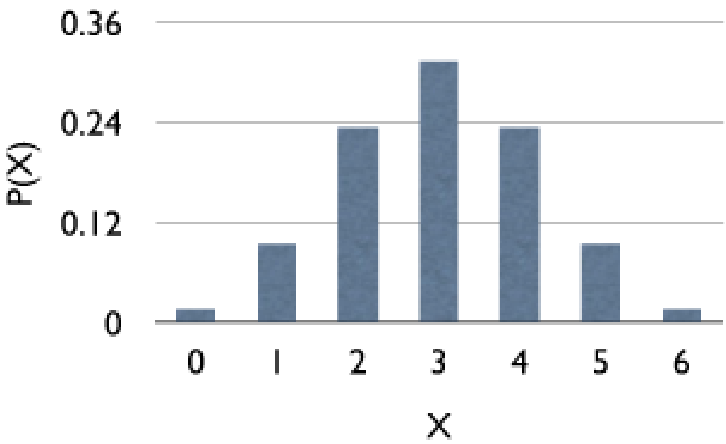
$x = 3 \Rightarrow P(X = 3) = f(3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = 0.313;$

$x = 4 \Rightarrow P(X = 4) = f(4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} = 0.234;$

$x = 5 \Rightarrow P(X = 5) = f(5) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} = 0.094;$

$x = 6 \Rightarrow P(X = 6) = f(6) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-6} = 0.016.$

Em termos gráficos



E portanto

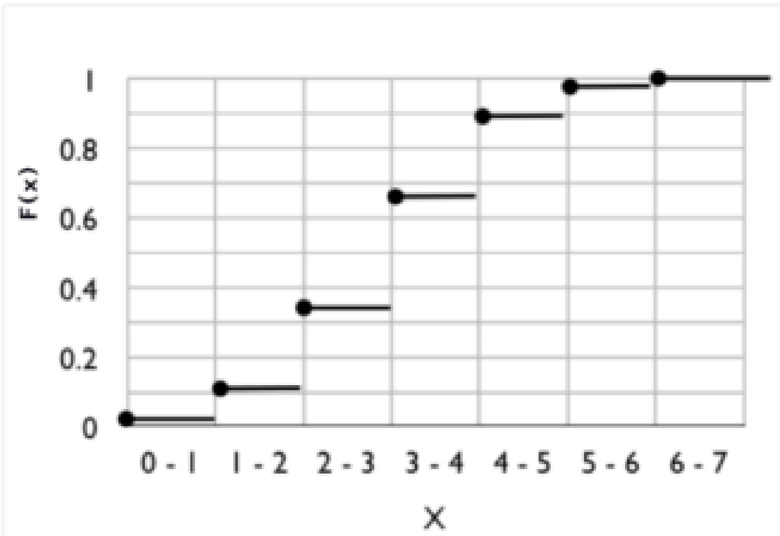
$$\sum_{i=0}^{6} P(X = x_i) = 1$$

.

A função distribuição associada a esta experiência é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.016 & 0 \leq x < 1 \\ 0.109 & 1 \leq x < 2 \\ 0.344 & 2 \leq x < 3 \\ 0.656 & 3 \leq x < 4 \\ 0.891 & 4 \leq x < 5 \\ 0.984 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

e a sua representação gráfica será a seguinte

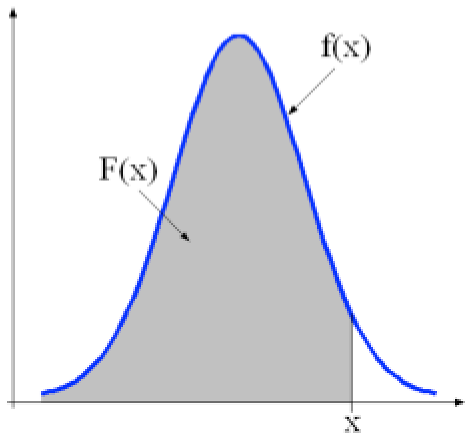


No caso contínuo a variável aleatória pode assumir uma infinidade de valores em qualquer intervalo [a, b]. Sendo X uma variável aleatória contínua, então

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ e } P(X = x) = 0$$

Considere-se, por exemplo, o intervalo [0, 6] onde a probabilidade de sair o nž 4,567342? é muito próxima de 0. Se X está entre -? e +?, então:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$$

e como

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = 0$$

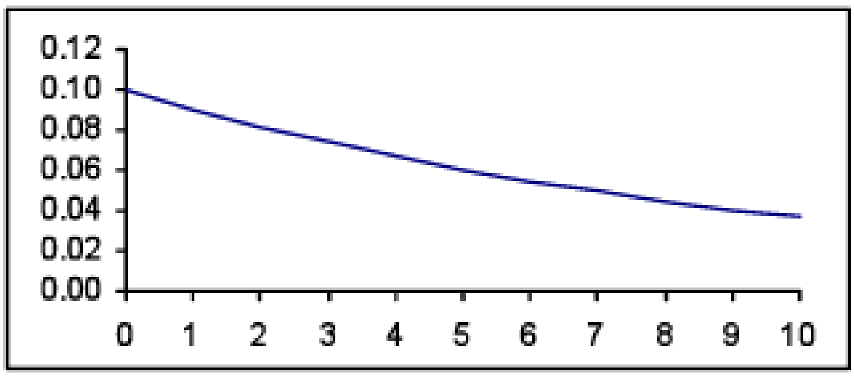
então

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)}$$

.

Consideremos agora o seguinte exemplo: A duração de vida útil, em milhares de horas, de uma componente de dado aparelho de radar é uma variável aleatória, X, com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



A probabilidade de uma componente escolhida ao acaso:
a) Durar menos de 4000 horas;

$$P(X < 4) = \int_0^4 0.1e^{-0.1x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-0.1x}\right]_0^4 = -e^{-0.4} + 1 \approx 0.33$$

b) Durar entre 5000 e 10000 horas.

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} 0.1e^{-0.1x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-0.1x}\right]_5^{10} = -e^{-1} + e^{-0.5} \approx 0.24$$

Da mesma forma podemos calcular a função distribuição

$$F(x) = \int_0^x 0.1e^{-0.1u}\,\mathrm{d}u = \left[-e^{-0.1u}\right]_0^x = 1 - e^{-0.1x}$$

e portanto

$$P(X < 4) = F(4) = 1 - e^{-0.4} \approx 0.33$$

Valor esperado ou esperança matemática - E(X) Para variáveis discretas o valor esperado é dado por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

correspondendo à média aritmética dos diferentes valores de X ponderados pelas probabilidades respectivas.
Para variáveis contínuas teremos
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ ou se $X \in [a, b]$ então $E(X) = \int_a^b xf(x)dx$

Propriedades
1. $E(c) = c$;
2. $E(cX) = cE(X)$;
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
4. Se X e Y independentes $E(XY) = E(X)E(Y)$;
5. $E(\sum X_i) = \sum E(X_i)$;

Variância - V(X) Para variáveis discretas a variância é dada por

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 f(x_i)$$

e para variáveis contínuas

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x)dx$$

. E portanto o desvio padrão $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Propriedades
1. $V(c) = 0$
2. $V(X + c) = V(X)$
3. $V(cX) = c^2 V(X)$
4. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ Se X e Y independentes