2.5 RELAÇÃO ENTRE DUAS VARIÁVEIS QUANTITATIVAS

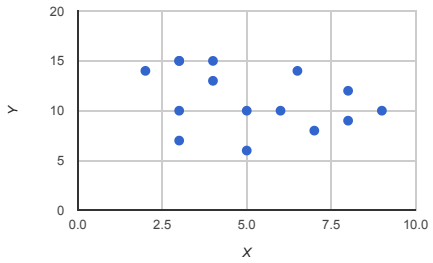
‹ 5. O Modelo de Regressão up Exercícios ›

Se observarmos para n indivíduos duas quaisquer variáveis X e Y teremos então n pares $(x_i; y_i)$ provenientes dos dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$:

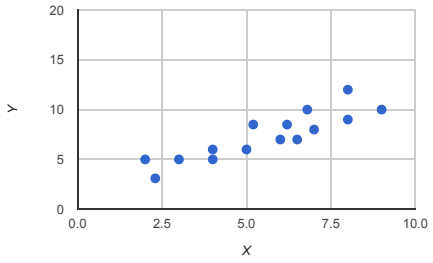
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Para analisar a relação entre X e Y podemos representar cada observação como um ponto de coordenadas (x_i, y_i) num referencial cartesiano. A nuvem de pontos obtida pode assumir diferentes configurações reveladoras do tipo relação que existirá entre as duas variáveis. Na figura seguinte são apresentadas quatro possibilidades diferentes.

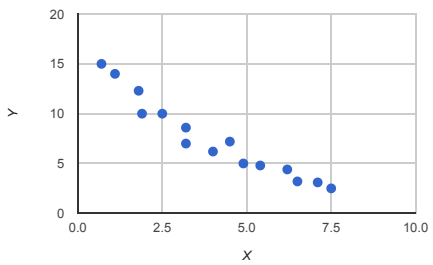
Ausência de correlação



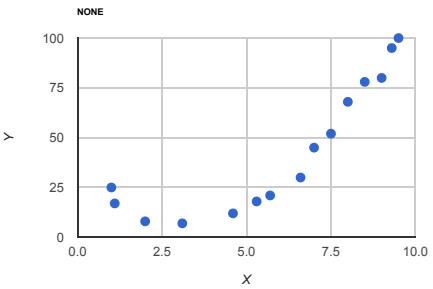
Correlação linear positiva



Correlação linear negativa



Correlação não linear

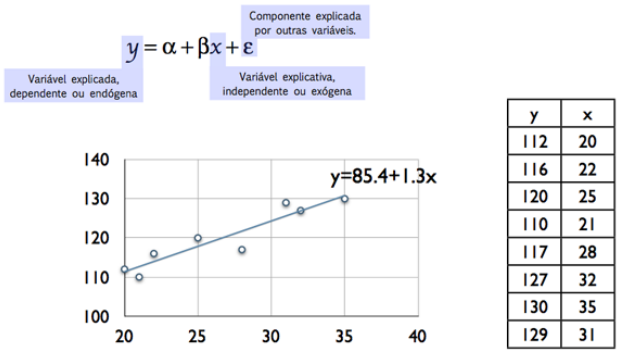


O coeficiente de correlação mede o carácter mais ou menos linear da nuvem de pontos e $-1 \leq r \leq +1$.

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\sqrt{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}\sqrt{N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} y_i)^2}}$$

Portanto, um valor absoluto próximo de 1 significa que a relação entre X e Y pode ser explicada através da equação de uma recta. Ou seja, cada observação de Y, a variável dependente ou endógena, é explicada pela observação x_i de X, a variável independente ou exógena, através de uma relação linear do tipo $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$. Representando ε_i o desvio (o erro) entre o valor estimado e o observado $\varepsilon_i = y_i - (\alpha + \beta x_i) = y_i - \hat{y}_i$. Considere-se o exemplo apresentado na figura 1 utilizando uma amostra de 8 observações (n=8):

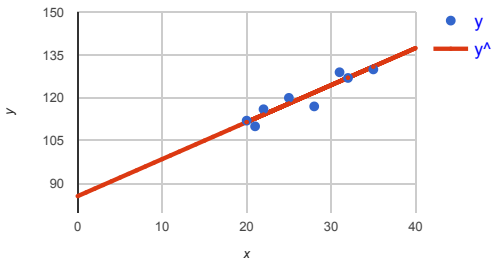
Figura 1.



y	x
112	20
116	22
120	25
110	21
117	28
127	32
130	35
129	31

FIGURA 1.

x	y
20	112
22	116
25	120
21	110
28	117
32	127
35	130
31	129



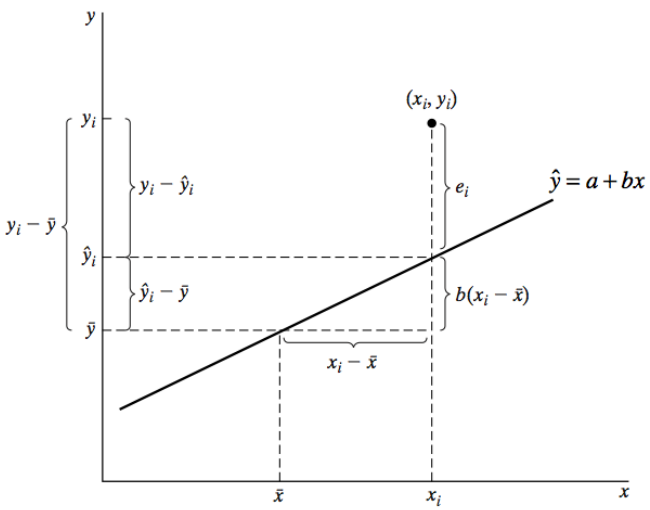
Neste caso, como na generalidade das situações, a nuvem de pontos não representa uma situação completamente linear, existirão sempre desvios entre os valores observados e os pontos de qualquer recta traçada naquele plano. Se minimizarmos a soma dos quadrados dos desvios é possível determinar uma equação da recta que torna $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$. A esta concretização (estimativa) de α e β, com base nestas 8 observações, denominaremos a e b, respectivamente.

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Portanto, nesta situação concreta, $\hat{y}_i = 85.4 + 1.3x_i$, significa que a variação de y por cada acréscimo unitário de x será de +1.3. Assim, os erros estimados serão dados por $e_i = y_i - (85.4 + 1.3x_i)$.
Consideremos agora, para analisar um pouco mais da qualidade presente nesta relação linear, a figura 2 que apresenta para um único valor de x_i a observação y_i e a sua estimativa $\hat{y}_i$.

Figura 2.



A generalização da distância $(y_i - \bar{y}_i) = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}_i)$ permite escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$$

ou
SQT = SQE+SQR,
onde SQT significa a soma dos quadrados totais, SQE a soma dos quadrados dos erros e SQR a soma dos quadrados explicados plea regressão.
Dividindo ambos os termos por n, podemos agora expressar a mesma relação através das variâncias.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{n}$$

ou

$$S_y^2 = S_e^2 + S_{\hat{y}}^2$$

Medindo a variabilidade explicada pelo modelo de regressão linear, $S_{\hat{y}}^2$, em função da variabilidade de y, S_y^2, podemos identificar uma estatística que avalia a qualidade do modelo: o coeficiente de determinação, R^2.

$$R^2 = \frac{S_{\hat{y}}^2}{S_y^2} = 1 - \frac{S_e^2}{S_y^2} = \frac{SQR}{SQT} = 1 - \frac{SQE}{SQT}$$

Que representa a percentagem da variabilidade de y explicada pelo modelo de regressão e $0 \leq R^2 \leq 1$.

‹ 5. O Modelo de Regressão up Exercícios ›