UAlg
esght

Medidas de localização e dispersão

Paulo Batista Basílio
(pbasilio@ualg.pt)

Dezembro 2014

Em primeiro lugar o cálculo das estatísticas descritivas depende da forma em que os dados disponíveis estão organizados. Se temos aceso à lista individual de todos os dados, então temos dados não classificados. Por outro lado, se temos acesso a uma distribuição de frequências, então os dados estão classificados. Neste contexto, iremos de seguida apresentar as estatísticas mais importantes para caracterizar um determinado fenómeno, distinguindo entre dados não classificados e dados classificados.

MEDIDAS DE LOCALIZÇÃO
1. Média Aritmética

$$Dados\ classificados \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i x_i^{'} = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i^{'}$$

$$onde\ \ x_i^{'} = l_i + \frac{1}{2}h_i\ \ o\ ponto\ mdio\ de\ classe\ i.$$

$$Dados\ no\ classificados \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

2. Mediana

$$Dados\ classificados:\ \ a\ mediana\ (m_e)\ \ o\ valor\ que\ divide\ o\ conjunto\ dos\ dados\ em\ dois\ subconjuntos$$

$$s(m_e) = s(Q2) = \frac{1}{2}$$

$$Dados\ no\ classificados\ e\ \ x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

$$Se\ N\ mpar, ento\ N = 2k+1\ com\ m_e = x_{k+1}$$

$$Se\ N\ par, ento\ N = 2k\ com\ m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

3. Moda

$$Dados\ classificados \rightarrow\ \ mo = l_{mo} + \frac{f_{mo+1}}{f_{mo+1} + f_{mo-1}} h_{mo}$$

$$Dados\ no\ classificados:\ \ valor\ mais\ frequente.$$

Comparação da média, da mediana e da moda

Consideremos em primeiro lugar uma distribuição simétrica, representada na figura seguinte:

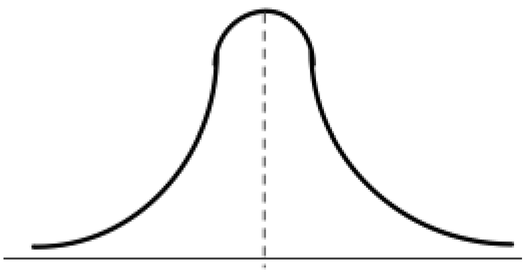
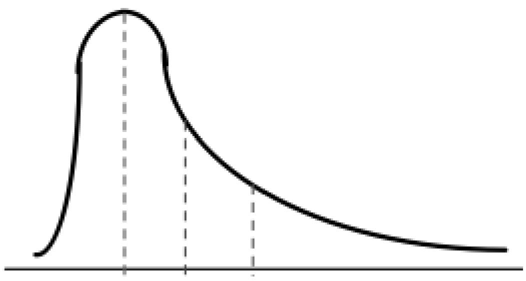


Figura 1. Distribuição simétrica.

$$\bar{x} = m_e = mo$$

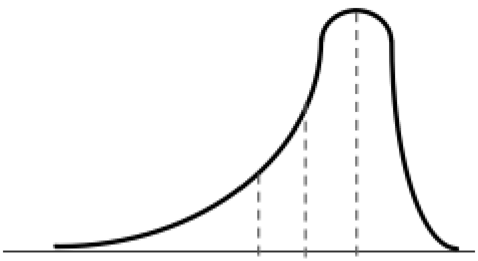
Neste caso, a posição relativa da média, da mediana e da moda é coincidente. À medida que a curva de frequências se alonga para um determinado lado, a média e a mediana deslocam-se para esse lado. Com efeito, a média desloca- se para esse lado à medida que o enviesamento se acentua. A mediana, como divide a área em duas partes iguais, afasta-se também da moda, mas menos do que a média.

Figura 2. Distribuição enviesada à esquerda ou assimétrica positiva.



$$mo < m_e < \bar{x}$$

Figura 3. Distribuição enviesada à direita ou assimétrica negativa.



$$\bar{x} < m_e < mo$$

4.Quantis

Para um melhor estudo e caracterização das distribuições, consideram-se aqui um conjunto de valores separadores denominados Quantis. Estes valores dividem o conjunto das observações em subconjuntos iguais.

$$q_\theta \to Quantil\ de\ ordem\ \theta,\ em\ que\ 0 < \theta < 1$$

Os quantis mais utilizados são os quartis, decis e percentis, que dividem, respectivamente, o conjunto ordenado de observações (variáveis discretas) ou a área do histograma (variáveis contínuas) em quatro, dez e cem partes iguais.

$$Dados\ no\ classificados\ e\ \ x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

Primeiro quartil (valor abaixo do qual estão 25% das observações e 75% acima).

$$\theta = \frac{1}{4} \to k = \frac{N+1}{4}\ em\ que\ q_1 = x_k$$

Segundo quartil (valor abaixo do qual estão 50% das observações e 50% acima - mediana).

$$\theta = \frac{2}{4} \to k = \frac{N+1}{2}\ em\ que\ q_2 = x_k$$

Terceiro quartil (valor abaixo do qual estão 75% das observações e 25% acima).

$$\theta = \frac{3}{4} \to k = \frac{3(N+1)}{4}\ em\ que\ q_3 = x_k$$

Se k é um valor inteiro, então o valor observado indicado por k corresponde ao quartil.

Se k não é inteiro, então o valor do quartil pode ser calculado de duas formas:

(1) quando o valor de k está a igual distância de dois valores inteiros então o quantil correspondente é igual à média aritmética das observações indicadas por esses valores;

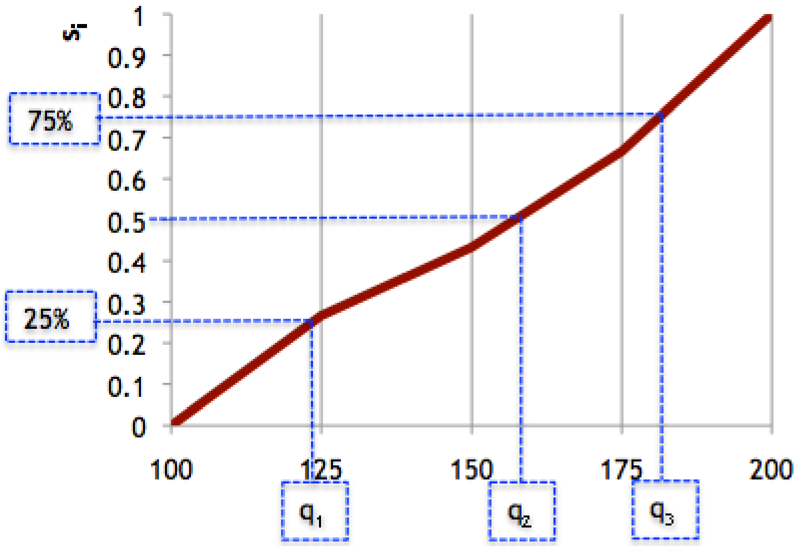
(2) quando se aproxima mais de um determinado valor inteiro, calcula-se k procedendo ao seu arredondamento para o inteiro mais próximo.

$$Dados\ classificados:$$

$$s(q_\theta) = \theta$$

Considerando o nosso exemplo anterior, nomeadamente a função cumulativa apresentada na distribuição de frequências das notas de entrada no curso, podemos representar graficamente o cálculo dos quartis.

Figura 4. Representação gráfica do cálculo dos quartis.



Assim:

1ž quartil - s(q1) = 0.25

2ž quartil - s(q2) = 0.5

3ž quartil - s(q3) = 0.75

Trata-se portanto de calcular os valores, no eixo das abcissas, correspondentes às frequências acumuladas de 0.25, 0.5 e 0.75. Para o cálculo de q1 sabe-se que o seu valor pertence à classe 100 - 125, então:

$$s(100) = 0 < s(q_1) < s(125) = 0.26(6)$$

e por interpolação linear

$$\frac{q_1 - 100}{125 - 100} = \frac{0.25 - 0}{0.26(6) - 0}$$

$$q_1 = 123.4$$

Portanto, 25% dos alunos entraram no curso com uma nota inferior a 123.4, enquanto os restantes alunos (75%) entraram com uma nota superior.

Seguindo o mesmo método para o cálculo de q2 (mediana) e para o terceiro quartil, teremos:

$$\frac{q_2 - 150}{175 - 150} = \frac{0.5 - 0.43(3)}{0.66(6) - 0.43(3)}$$

$$q_2 = 157.14$$

$$\frac{q_3 - 175}{200 - 175} = \frac{0.75 - 0.66(6)}{1 - 0.66(6)}$$

$$q_3 = 181.25$$

Figura 5. Representação gráfica do cálculo dos quartis.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

1. Amplitude total

$$AT = max(x_i) - min(x_i)$$

2. Amplitude inter-quartil

$$q = q_3 - q_1$$

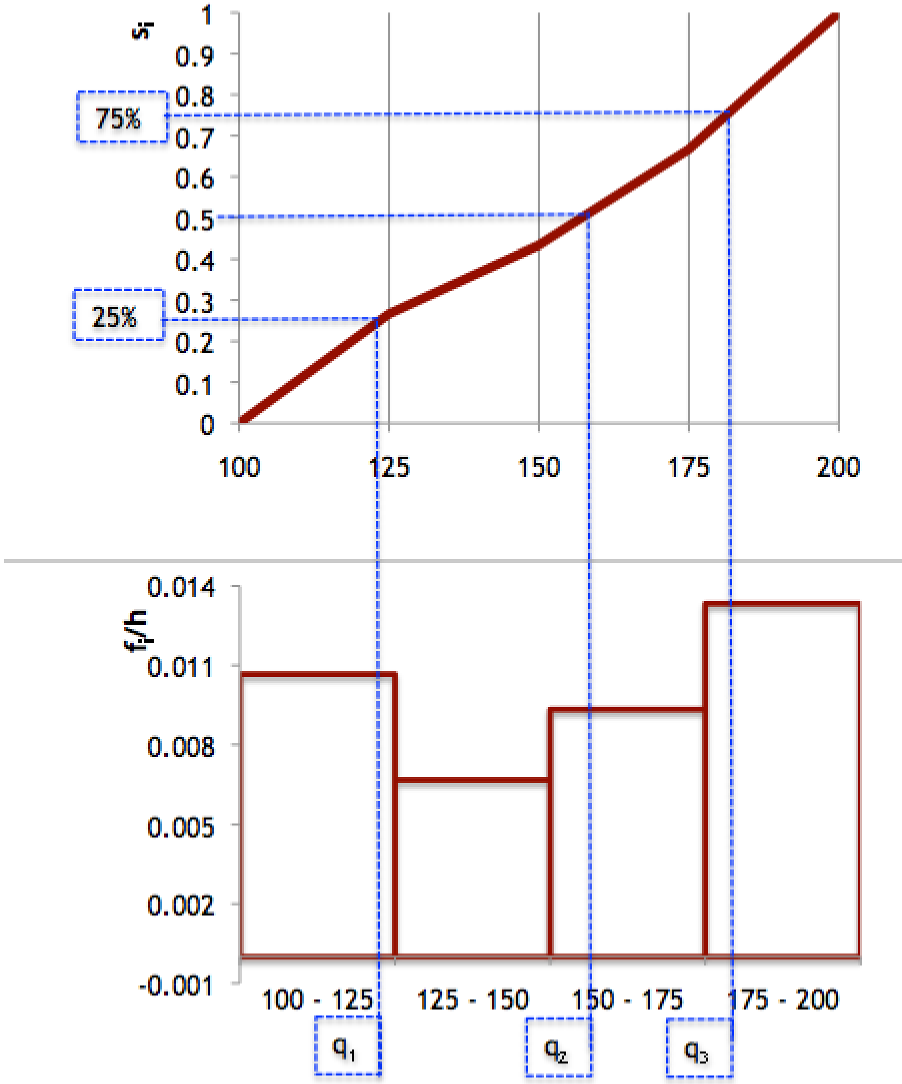
3. Amplitude semi-quartil

$$sq = \frac{q_3 - q_1}{2}$$

4. Desvio médio

$$Dados\ classificados \rightarrow d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i|x_i^{'} - \bar{x}|$$

$$Dados\ no\ classificados \rightarrow d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|$$



5. Variância e desvio padrão

$$Dados\ classificados \rightarrow s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i(x_i^{'} - \bar{x})^2$$

$$Dados\ no\ classificados \rightarrow s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

Quando N é pequeno utiliza-se a variância corrigida.

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

6. Coeficiente de variação

O coeficiente de variação é uma medida de dispersão relativa, ou seja, é independente, quer das unidades de medida quer das escalas, com que os dados são medidos. A eliminação destes factores (unidades de medida e escala), faz com que esta medida seja utilizada na comparação da dispersão de dois ou mais conjuntos de dados.

$$cv = \frac{s}{\bar{x}}100$$