UAlg
esght

Distribuições teóricas

Paulo Batista Basílio
(pbasilio@ualg.pt)

Dezembro 2014

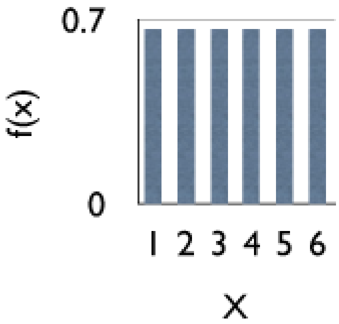
DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

1. A distribuição uniforme

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{N}, i = 1, 2, ..., N$$

$$E(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \; e \; V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right]$$

Esta função representa experiências como o lançamento de um dado (N = 6) e portanto $f(x) = \frac{1}{6}$, para x = 1, 2, ...,6. Em termos gráficos temos



2. A distribuição binomial

$$f(x|p) = P(X = x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, x = 0, 1, 2, ..., N \; e \; 0 < p < 1$$

Diz-se então que X segue uma distribuição binomial, $X \sim B(N, p)$ com $E(X) = Np$ e $V(X) = Npq$. Modelo probabilístico adequado para descrever os processos em que se realizam repetidas provas de Bernoulli (sucessões de experiências aleatórias independentes) em que: $P(A) = p$ (sucesso) $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ (insucesso) X é o número de sucessos em N provas repetidas.

$$\sum_{x=0}^{N} f(x) = \sum_{x=0}^{N} \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = 1$$

Quando N=1 temos a **distribuição de Bernoulli** $X \sim B(N, p)$

$$f(x|p) = P(X = x) = p^x q^{1-x}, x = 0, 1 \; e \; 0 < p < 1$$

Consideremos, por exemplo, cinco lançamentos de um dado "perfeito". Qual a probabilidade de se obter duas vezes a face com seis pintas? Neste caso, A é o acontecimento

saída de seis pintas (sucesso) e $\bar{A}$ o acontecimento contrário (insucesso). Por conseguinte:
$p = P(A) = \frac{1}{6}$,
$q = P(\bar{A}) = 1 - p = \frac{5}{6}$,
$f(2|\frac{1}{6}) = P(X = 2) = \binom{5}{2} (\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = 10 \times (\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = 0,16$
Saída de dois 6 em cinco lançamentos
$AA\bar{A}\bar{A}\bar{A}$; $A\bar{A}A\bar{A}\bar{A}$; $A\bar{A}\bar{A}A\bar{A}$; $A\bar{A}\bar{A}\bar{A}A$; $\bar{A}AA\bar{A}\bar{A}$;
$\bar{A}A\bar{A}A\bar{A}$; $\bar{A}A\bar{A}\bar{A}A$; $\bar{A}\bar{A}AA\bar{A}$; $\bar{A}\bar{A}A\bar{A}A$; $\bar{A}\bar{A}\bar{A}AA$ $\quad \frac{5!}{2!3!} = 10$

3. A distribuição hipergeométrica

$$f(x|p) = P(X = x) = \frac{\binom{Mp}{x}\binom{Mq}{N-x}}{\binom{M}{N}}, x = 0, 1, 2, ..., N \; e \; 0 < p < 1$$

Probabilidade de X se, de um universo de M elementos, forem retirados amostras de N elementos sem reposição, onde: $Mp + Mq = M$ $p + q = 1$ e $0 < p < 1$ $E(X) = Np$ e $V(X) = Npq\frac{(N-M)}{(M-1)}$

4. A distribuição de Poisson Uma variável aleatória X, com função probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, ... \; e \; \lambda > 0$$

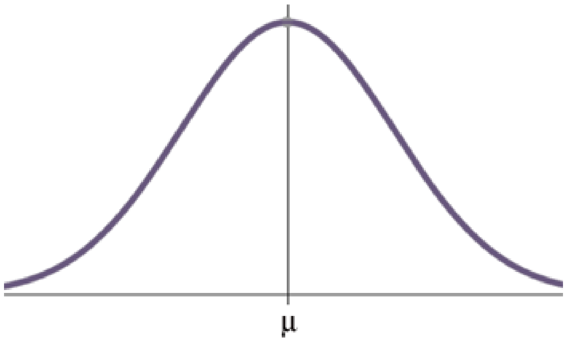
diz-se que tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, $X \sim P(\lambda)$ com $E(X) = \lambda$ e $V(X) = \lambda$. A distribuição de Poisson é um caso particular da distribuição Binomial em que $E(X) = Np = \lambda$ quando $n \to \infty \Rightarrow p \to 0$ a distribuição Binomial converge para a de Poisson.

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

1. A distribuição Normal
Uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

diz-se que tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ. Ou seja, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (ou, σ^2) em que $E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$.



A distribuição normal reduzida ou estandartizada Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ então a variável $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. E por conseguinte

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dz$$