UAlg
esght

Probabilidade

Paulo Batista Basílio
(pbasilio@ualg.pt)

Dezembro 2014

Experiência aleatória e acontecimentos

A teoria da probabilidade teve o seu início no século XVII, em França, com dois grandes matemáticos: Blaise Pascal e Pierre de Fermat, na procura de respostas aos problemas colocados pelos jogos de fortuna e azar. Hoje em dia a teoria desempenha um papel crescente em muitas áreas: seguros, mercados, stocks, call-centers, etc. É um ramo da matemática que lida com as propriedades dos fenómenos onde o 'azar' intervém.
Na estatística, a teoria das probabilidades é utilizada em três domínios diferentes:
- a observação de dados estatísticos pode dar origem a valores errados (por exemplo, a utilização de um equipamento deficiente na medição da poluição de um rio). A teoria das probabilidades permite representar, através de variáveis aleatórias, os desvios entre os valores observados e os valores reais.
- o estudo de determinados fenómenos tem mostrado que a distribuição de uma determinada variável, numa população, está próxima de modelos probabilísticos;
- os métodos de amostragem aleatórios que permitem assegurar na amostra uma representatividade do universo num determinado critério relevante.

Este ramo autónomo da matemática, que permite o desenvolvimento de teorias probabilísticas, baseia-se numa axiomática própria que modela os resultados obtidos na realização de experiências aleatórias. Uma experiência, diz-se aleatória se não podemos prever o seu resultado antecipadamente, mesmo que essa experiência se repita em condições idênticas. No entanto, apesar de não ser possível prever o resultado, podemos representar o conjunto de todos os resultados possíveis: Ω. Portanto, Ω é o conjunto fundamental (não vazio), discreto ou contínuo, formado por todos os resultados que é possível obter quando se efectua a experiência aleatória. Por exemplo, uma experiência aleatória que consiste no lançamento ao ar de uma moeda perfeita tem associada o seguinte conjunto $\Omega = \{cara, coroa\}$.
A definição clássica de probabilidade é portanto a **relação entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número total de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis**. Nesta experiência aleatória os casos possíveis são a cara ou a coroa e por conseguinte a Prob. cara = Prob. coroa = $\frac{1}{2}$. Se em vez de um lançamento, efectuarmos dois lançamentos consecutivos da mesma moeda, então $\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$ e a probabilidade para que apareça apenas uma cara será de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Por outro lado, a probabilidade pode ser interpretada como uma frequência relativa <span class="label-bold» (Interpretação frequencista): a probabilidade de um acontecimento pode ser medida através da observação da frequência relativa do mesmo acontecimento num grande conjunto de provas ou experiências, idênticas e independentes (?lei dos grandes números?).

$$f_N(A) = \frac{n_N(A)}{N}$$

A frequência relativa com a qual o acontecimento A ocorre, flutuará menos à medida que o tempo passa, tenderá para o limite à medida que N aumenta. Exemplo: (%) de Alunos e Alunas na sala. Ou o nascimento de bebés do sexo masculino e feminino.

Neste contexto um **acontecimento** é uma proposição lógica relativa ao resultado da experiência. O acontecimento só se realiza, ou não, consoante a proposição seja verdadeira, ou falsa, depois de terminada a experiência. À realização de um acontecimento podemos associar todos os resultados correspondentes. No exemplo anterior, a saída de pelo menos uma cara corresponde ao conjunto seguinte: $\{(cara, coroa), (coroa, cara)\}$, ou seja, uma parte de Ω.

Álgebra de acontecimentos

Portanto, usando a notação dos conjuntos, o acontecimento A é um subconjunto de resultados possíveis de uma experiência aleatória, $A \subset \Omega$. Podemos por isso definir o conjunto de acontecimentos como uma família de subconjuntos, denominada $\mathcal{A}$, onde se verificam os seguintes axiomas da álgebra de conjuntos:
1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) Se $A \in \mathcal{A}$ então $\bar{A} \in \mathcal{A}$
A todo o acontecimento A podemos associar o seu contrário, denominado $\bar{A}$, tal que se A se realiza então $\bar{A}$ não, e reciprocamente. No contexto de Ω, $\bar{A}$ é a parte complementar de A.
3) Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$ então $A \cup B \in \mathcal{A}$
Pode-se também mostrar que estes axiomas implicam também que o conjunto vazio $\phi \in \mathcal{A}$ e que $\cap A_i \in \mathcal{A}$.
O espaço de acontecimentos define-se por isso como o par $(\Omega, \mathcal{A})$, onde Ω é o espaço de resultados e os seus subconjuntos estão em $\mathcal{A}$.

Espaço de probabilidade

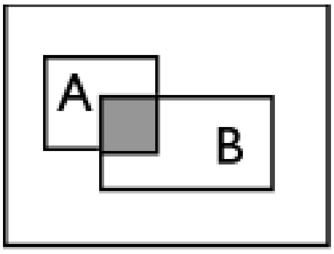
A cada acontecimento podemos associar uma probabilidade compreendida entre 0 e 1. A teoria moderna das probabilidades assenta num conjunto de axiomas, geralmente conhecido pela **Axiomática de Kolmogorov**.
1) $P(A) \geq 0$, qualquer que seja o acontecimento $A \in \mathcal{A}$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Se A e B são acontecimentos disjuntos (incompatíveis), i. e. $A \cap B = \phi$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4) Se $A_1, A_2, ...$são acontecimentos disjuntos dois a dois, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Como consequência desta axiomática, podemos também enunciar as propriedades seguintes:
1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2) $P(\phi) = 0$
3) $P(A) < P(B)$ se $A \subset B$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Probabilidade condicional e independência

O conceito de probabilidade condicional surge quando pretendemos reavaliar a probabilidade através da incorporação de nova informação. Suponhamos que nos interessa a realização de um acontecimento A, sabendo que um outro acontecimento B já se realizou. Se A e B são incompatíveis a questão está resolvida: A não se realizará. Se $A \cap B \neq \phi$ então é possível que A se realize embora o universo de possibilidades não seja agora Ω, mas sim B.



Com efeito, só interessa a realização de A no contexto de B. Ou seja, a probabilidade condicional de A dado B é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} se P(B) > 0$$

e portanto $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Se A e B são independentes, então $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Neste sentido, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Teorema de Bayes

Seja o seguinte espaço amostral $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$

Diz-se que a classe de acontecimentos $A_1, A_2, ?, A_m$ é uma partição de Ω quando

$$1)A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$$

$$2)\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$$

Por conseguinte,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) = 1$$

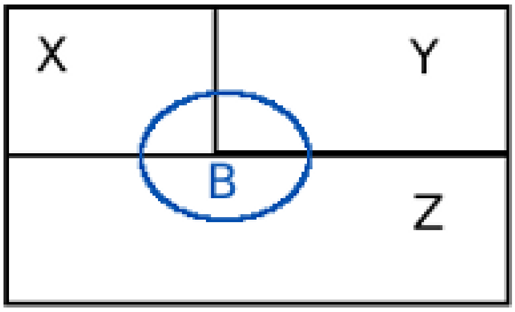
Se A_i constituir um sistema completo de acontecimentos (uma partição de Ω) podemos escrever $P(A_i \cap B) = P(A_i)(B|A_i)$ e o **teorema das probabilidades totais**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)P(B|A_i)$$

O **Teorema de Bayes** será portanto enunciado da seguinte forma: Se $\{A_1, A_2, ?, A_m\}$ é uma partição de Ω e se $P(A_i) > 0, i = 1, 2, ?, m$ então dado qualquer acontecimento, B, com $P(B) > 0$ e

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}, i = 1, 2, ..., m$$

Tomemos como exemplo uma fábrica onde 3 inspectores X, Y e Z inspeccionam 20%, 30% e 50% dos artigos produzidos. Ou seja, todos os artigos produzidos são inspeccionados e ao seleccionarmos aleatoriamente um, a probabilidade desse artigo ter sido inspeccionado por X é 0.2 , por Y é 0.3 e por Z é 0.5. Neste universo de artigos existem naturalmente artigos defeituosos que são inspeccionados (detectados) pelos três inspectores. Com base no histórico sabemos que cada inspector detecta uma determinada percentagem de artigos defeituosos. Assim, o inspector X de todos os artigos que inspecciona encontra apenas 5% de artigos defeituosos, enquanto Y e Z detectam 10% e 15%, respectivamente. Nesta partição de Ω ocorre também B - artigo defeituoso e a probabilidade de serem detectados artigos defeituosos naqueles que são inspeccionados por X, Y e Z é igual a 0.05, 0.1 ou 0.15, respectivamente.



$$P(X) = 0.2, P(Y) = 0.3, P(Z) = 0.5$$

$$P(B|X) = 0.05, P(B|Y) = 0.1, P(B|Z) = 0.15$$

Neste contexto, se tirarmos ao acaso um artigo produzido nesta fábrica, a probabilidade de que seja defeituoso corresponde ao cálculo da probabilidade total, uma vez que

$$P(B) = P(X)P(B|X)+P(Y)P(B|Y)+P(Z)P(B|Z) = 0.2\times0.05+0.3\times0.1+0.5\times0.15 = 0.115$$

Sabendo agora que o artigo é defeituoso as probabilidades desse artigo ter sido inspeccionado por X, Y ou Z são dadas por:

$$P(X|B) = \frac{P(X)P(B|X)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.05}{0.115} = 0.087$$

$$P(Y|B) = \frac{P(Y)P(B|Y)}{P(B)} = \frac{0.3 \times 0.1}{0.115} = 0.26$$

$$P(Z|B) = \frac{P(Z)P(B|Z)}{P(B)} = \frac{0.5 \times 0.15}{0.115} = 0.652$$

São denominadas probabilidades **a posteriori** porque sabemos primeiro que o artigo é defeituoso e só depois a probabilidade de ser inspeccionado por um dos inspectores. Não devemos portanto confundir a probabilidade condicionada com a probabilidade **a posteriori** porque este caso é a probabilidade do artigo ser defeituoso quando inspeccionado por um determinado inspector.
Um exemplo que nos permite ver os dois lados desta moeda é o do comerciante que recebe batata de três regiões diferentes. Ao chegar, cada lote é classificado em duas classes A e B, de acordo com a qualidade do produto. Neste momento a distribuição

dos lotes recebidos até à data é a seguinte:

		$Qualidade$	
$Regioes$	KG	A	B
I	10000	2000	8000
II	20000	14000	6000
III	20000	10000	10000
	50000		